Corrigé

1. Dans le repère $(\mathrm{A};\mathrm{B},\mathrm{D})$ on a $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$; $A'(2;0)$ et $D'(0;-1)$.
2. A' est le symétrique de A par rapport à B si et seulement si B est le milieu du segment $[AA']$. Calculons les coordonnées du milieu du segment $[AA']$.
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{x_A+x'_A}{2} \\ y & = & \frac{y_A+y'_A}{2} \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{0+2}{2} \\ y & = & \frac{0+0}{2} \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$
On constate que le point B, dont les coordonnées sont $(1;0)$, est bien le milieu du segment $[AA']$. Donc A' est le symétrique de A par rapport à B.
On montre de même que A est le milieu de $[DD']$.
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{x_D+x'_D}{2} \\ y & = & \frac{y_D+y'_D}{2} \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{0+0}{2} \\ y & = & \frac{1-1}{2} \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$
On constate que le point A, dont les coordonnées sont $(0;0)$, est bien le milieu du segment $[DD']$. Donc D' est le symétrique de D par rapport à A.
3. Comme C' est le symétrique de C par rapport à D, D est le milieu de $[CC']$. On a donc : $x_D = \dfrac{x_C + x_{C'}}{2}$ et $y_D = \dfrac{y_C + y_{C'}}{2}$ donc $x_{C'} = 2x_D - x_C = 2 - 1 = -1$ et $y_{C'} = 2y_D - y_C = 2 - 1 = 1$. Les coordonnées de C' sont donc $C'(-1;1)$.
4. On procède de la même manière que dans la question précédente : Comme B' est le symétrique de B par rapport à C, C est le milieu de $[BB']$. On a donc : $x_C = \dfrac{x_B + x_{B'}}{2}$ et $y_C = \dfrac{y_B + y_{B'}}{2}$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} x_{B'} & = & 2x_C - x_B \\ y_{B'} & = & 2y_C - y_B \end{array}\right.$ d'où le résultat : $B'(1;2)$.
5. Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$ ont le même milieu.
D'une part : $\dfrac{x_{A'} + x_{C'}}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{y_{A'} + y_{C'}}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Et d'autre part : $\dfrac{x_{B'} + x_{D'}}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{y_{B'} + y_{D'}}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$.
On en déduit donc que le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ est le milieu des deux diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$ donc que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.